(Dienstag, 20.03.18)

Beweis Proposition 2.7 (d.h. $B - A \geq 0$)

a, b konvergent $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 : \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_\varepsilon :$

$$\Big(\underbrace{|a(n) - A| < \varepsilon}_{\boxed{a(n) \in (A-\varepsilon, A+\varepsilon)}} \wedge \underbrace{|b(n) - B| < \varepsilon}_{\boxed{b(n) \in (B-\varepsilon, B+\varepsilon)}}\Big)$$

Daraus folgt

$$B - A = B - b(n) + \overbrace{b(n) - a(n)}^{\geq 0,\ \text{da}\ a(n) \leq b(n)} + a(n) - A \geq$$

$$B \boxed{- b(n)} + \boxed{a(n)} - A > B \boxed{- B - \varepsilon} + \boxed{A - \varepsilon} + A$$

(denn $-b(n) > -B - \varepsilon$

und $a(n) > A - \varepsilon$)

Also $B - A > -2\varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$

(d.h. $B - A$ ist größer als jede negative Zahl)

$\Rightarrow B - A \geq 0$

Wiederholung: Satz 2.5, 2.6 benutzt man, um die Grenzwerte zu berechnen.

(Satz 2.6. $\Rightarrow$ Folgerung: (Sandwich-Lemma) wird zur Berechnung von Grenzwerten benutzt)

Falls die Grenzwerte nicht vorgegeben sind, oder der Grenzwert nicht berechnet werden kann ... ?

Ratt GmbH
6850 Dornbirn, Welloch 1
T +43 5574/22 365-0
F +43 5574/22 365-6
office@rattpack.eu
www.rattpack.eu

2.8. Definition

Eine Folge heißt $a: \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ heißt Cauchy-Folge falls,

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n, m \geq n_\varepsilon : \underbrace{|a(n) - a(m)| < \varepsilon}$$

$a(n) \in (a(m)-\varepsilon, a(m)+\varepsilon)$
oder
$a(m) \in (a(n)-\varepsilon, a(n)+\varepsilon)$

(d.h. für jedes $\varepsilon > 0$ wird der Abstand zwischen $a(n)$ und $a(m)$ kleiner mit wachsenden n, m)

Deutet auf Konvergenz!

2.9. Satz

Jede konvergente Folge ist eine Cauchy-Folge.

Beweis: (a konverg.: $\forall \varepsilon > 0 : \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_\varepsilon : |a(n) - A| < \varepsilon$)

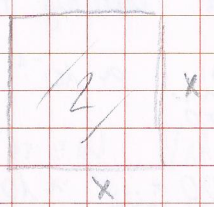
$$\underbrace{\forall \varepsilon > 0 : \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}}_{\text{Def. Konvergenz}} : \forall n, m \geq n_\varepsilon$$

$$|a(n) - a(m)| = |a(n) - A + A - a(m)| \overset{\text{Dreiecksungl.}}{\leq} \underbrace{|a(n) - A|}_{\substack{<\varepsilon \\ \text{wegen} \\ n \geq n_\varepsilon}} + \underbrace{|A - a(m)|}_{\substack{<\varepsilon \\ \text{wegen} \\ m \geq n_\varepsilon}} < 2\varepsilon \quad (\forall \varepsilon > 0)$$

(a konvergiert $\Rightarrow$ a Cauchy Folge)

Beispiele (Gilt: a Cauchy-Folge $\Rightarrow$ a konvergent in $\mathbb{K}$?
Nein, falls $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$)

Motivation: ist die Fragestellung

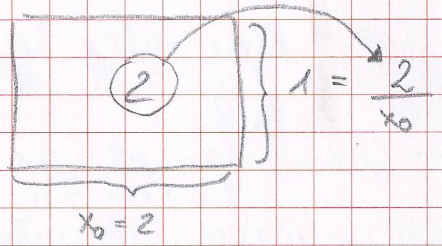
„Konstruiere  mit Flächeninhalt 2." (Fragestellung von 1900 v. Chr)

oder „äquivalent": „löse $x^2 = 2$"

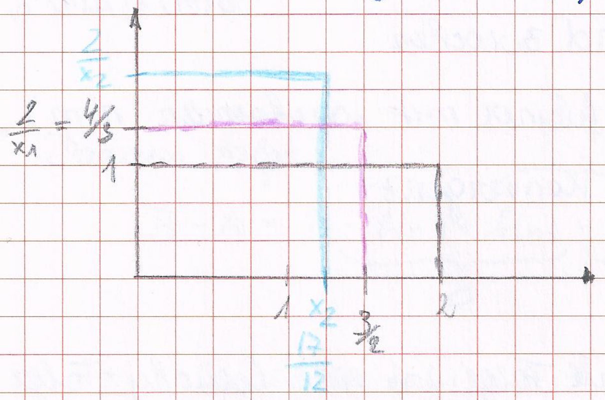
z.B. Heron-Verfahren (100 n. Chr)

Heron-Verfahren

1. Schritt : Konstruiere



2. Schritt : $x_1 = \frac{1}{2}\left(x_0 + \frac{2}{x_0}\right) = 1{,}5$



3. Schritt : $x_2 = \frac{1}{2}\left(x_1 + \frac{2}{x_1}\right) = \frac{17}{12} = 1{,}41\overline{6}$ $\in \mathbb{Q}$

4. Schritt : $x_3 = \frac{1}{2}\left(x_2 + \frac{2}{x_2}\right) = 1.41421568\ldots$ $\in \mathbb{Q}$

5. Schritt : $x_4 = \ldots = 1.4142135\ldots$ $\in \mathbb{Q}$

$\approx \sqrt{2}$

Cantor 1889 : $\sqrt{2}$ ist ein Zeichen für eine reelle Zahl

die .... etwa durch

$(1{,}4 \ ; \ 1{,}41, \ 1{,}414, \ \ldots)$ Cauchy-Folge die gegen $\sqrt{2}$ konvergiert.

beschrieben wird, d.h.

$\sqrt{2} \approx 1.4 \ ; \ \sqrt{2} \approx 1{,}41, \ \ldots$

Wie erkennt man eine Cauchy Folge ?

$|x_2 - x_3| = 0.00\underbrace{*\ldots}_{\neq 0} \approx 10^{-2}$

$|x_3 - x_4| = 0.00000\underbrace{*\ldots}_{\neq 0} \approx 10^{-5}$

d.h. der Abstand zwischen $|a(n+1) - a(n)|$

wird kleiner bei wachsendem n.

Ratt GmbH
6850 Dornbirn, Welloch 1
T +43 5574/22365-0
F +43 5574/22365-6
office@rattpack.eu
www.rattpack.eu

Welche Folge (von Näherungen an $\sqrt{2}$) wählt man, um $\sqrt{2}$ zu beschreiben?

(Lieblingsfolge von Näherungen)

$\sqrt{2}$ ist $[\, a = (a(n))_{n\in\mathbb{N}} \,] = \{ b : \mathbb{N} \to \mathbb{Q} : b$ Cauchy-Folge,

$\lim_{n\to\infty} (a(n) - b(n)) = \lim_{n\to\infty} a(n) - \lim_{n\to\infty} b(n) = \sqrt{2} - \sqrt{2} = 0 \}$

Genauso ist $1/3$

$a = (1/3)_{n\in\mathbb{N}} = \{ b : \mathbb{N} \to \mathbb{Q} : b$ Cauchy Folge,

$\downarrow$ $a(n)$ (Lieblingsfolge)

$\lim_{n\to\infty} (a(n) - b(n)) = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = 0 \}$

Satz von Euklid: $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

Beweis:

Annahme: $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, d.h. $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, $p \in \mathbb{N}$, $q \in \mathbb{N}$, $ggT(p,q) = 1$

$\Rightarrow 2 = \frac{p^2}{q^2} \Rightarrow 2q^2 = p^2 = p \cdot p \Rightarrow \underline{2} \mid p \Rightarrow p = 2k \quad k \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow 2q^2 = (2k)^2 \Rightarrow 2q^2 = 4k^2 \Rightarrow q^2 = 2k^2 \Rightarrow 2 \mid q \Rightarrow ggT(p,q) \neq 1$

$\lightning$

Satz von Heron:

Sei $y \in \mathbb{Q}$, $y > 0$. Das Heron-Verfahren konvergiert für alle x_0 ($y < x_0^2 \leq 2y$) gegen $\sqrt{y}$

Beweis:

1) $x_n^2 > y \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (d.h. $x_n > \sqrt{y} \quad \forall n \in \mathbb{N}$)

(Beachte: $x_{n-1} - \frac{y}{x_{n-1}} = \frac{x_{n-1}^2 - y}{x_{n-1}} \neq 0$ I.V. $x_{n-1}^2 > y$)

I.A. $x_0^2 > y$

I.V. $x_{n-1}^2 > y$

I.S. $x_n^2 - y = \left(\frac{1}{2}\left(x_{n-1} + \frac{y}{x_{n-1}}\right)\right)^2 - y = \frac{1}{4} x_{n-1}^2 + \underbrace{\frac{1}{\cancel{4}} \cdot \cancel{2} x_{\cancel{n-1}} \cdot \frac{y}{\cancel{x_{n-1}}}}_{=\frac{1}{2}y} +$

$\frac{1}{4} \frac{y^2}{x_{n-1}^2} - y = \frac{1}{4} x_{n-1}^2 - \frac{1}{2} y + \frac{1}{4} \frac{y^2}{x_{n-1}^2} = \left(\frac{1}{2}\left(x_{n-1} - \frac{y}{x_{n-1}}\right)\right)^2 > 0$

d.h. die Abschätzung $x_n \approx \sqrt{y}$ ist besser als $x_{n-1} \approx \sqrt{y}$

2) $\underbrace{\sqrt{y} <}_{\text{aus 1)}} x_n < x_{n-1} \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \quad (0 < x_n - \sqrt{y} < x_{n-1} - \sqrt{y})$

$$x_n - x_{n-1} = \frac{1}{2}\left(x_{n-1} + \frac{y}{x_{n-1}}\right) - x_{n-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{y}{x_{n-1}} - x_{n-1}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{y - x_{n-1}^2}{x_{n-1}}\right) \overset{\text{wegen 1)}}{<} 0$$

3) $0 < x_n - \sqrt{y} < \dfrac{x_0 - \sqrt{y}}{2^n}$ (d.h. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n - \sqrt{y} = 0$) → Sandwich Lemma

Definition

Reelle Zahlen sind die Vervollständigung von $\mathbb{Q}$ mit den Grenzwerten alle Cauchy Folgen $a: \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$

Eine reelle Zahl ist

$$[a = (a(n))_{n\in\mathbb{N}}] = \{ b: \mathbb{N} \to \mathbb{Q} \text{ Cauchy Folge}, \lim_{n\to\infty} (a(n) - b(n)) = 0 \}$$